

## Учебно-тематические занятия с одаренными детьми

### 8-9 классы

№ п/п	Название темы	Кол-во часов	Дата
1	Числовые ребусы. Восстановление цифр натуральных чисел. Решение олимпиадных задач	1	ноябрь
2	Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах. Решение олимпиадных задач	1	ноябрь
3	Неравенства в целых числах	1	декабрь
4	Принцип Дирихле. Принцип крайнего	1	декабрь
5	Логические задачи	1	январь
6	Логические задачи	1	февраль
7	Инварианты	1	февраль
8	Инварианты	1	март
9	Инварианты	1	март
10		1	апрель
11	Задачи повышенной трудности, содержащие проценты	1	апрель
12	Итоговое занятие	1	май

### Занятие № 5-6 январь-февраль

#### Тема «Логические задачи»

**Цель:** *Сформировать у школьников культуру мышления.*

**Задачи:**

1. *Познакомить с понятием «логическая задача».*
2. *Познакомить с алгоритмами и методами их решения.*
3. Подобрать логические задачи, решаемые разными методами.

**Оборудование к занятию кружка:**

- Компьютер, проектор
- Карточки с заданиями для работы на кружке
- Карточки с домашним заданием

**Ход мероприятия:**

Вопрос для учащихся:

Как вы думаете, что такое логика? ([презентация](#)) (Ребята предлагают свои варианты ответа)

**Логика** (др.-греч.)— «наука о правильном мышлении», «искусство рассуждения») - наука о законах мышления.

А что такое логические задачи?

**Логическая задача** — это некоторая проблемная ситуация описанная каким либо возможным образом (на естественном, математическом или логическом языке, в виде схемы, рисунка или любым другим способом) для разрешения которой необходимы только правильные (логические) рассуждения.

**В основе логически правильного мышления лежат логические законы.**

**Рассуждать логично** — значит рассуждать в соответствии с законами логики.

**Например:** (решите устно задачу)

В корзине лежат 5 яблок. Вопрос: как разделить эти яблоки между пятью девочками, чтобы каждой девочке досталось по одному яблоку и чтобы одно яблоко осталось в корзине.

**Ответ:** надо дать четырем девочкам по яблоку, а пятой девочке - оставшееся яблоко вместе с корзиной.

На практике не всегда удаётся быстро найти способ решения и сами задачи не всегда бывают простыми. Чтобы научиться решать надо знать алгоритм решения задач.

### **Основные этапы решения логических задач**

**1 этап** – анализ условия задачи. Получив задачу, первое, что нужно сделать, это разобраться в том, что это за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования, т.е. провести анализ задачи. Этот анализ и составляет первый этап процесса решения задачи. А необходим он для того чтобы понять общую ситуацию, описанную в задаче.

**2 этап** – схематическая запись задачи. Анализ задачи следует как-то оформить, записать, для этого используются разного рода схематические записи задач, построение которых составляет второй этап процесса решения. А это для того чтобы выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и **заклучения**.

**3 этап** – поиск способа решения задачи. Анализ задачи и построение ее схематической записи необходимы главным образом для того, чтобы найти способ решения данной задачи. Поиск этого способа является третьим этапом процесса решения. Составление плана решения задачи, пожалуй, является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом.

**4 этап** – осуществление решения задачи. Когда способ решения задачи найден, его нужно осуществить. Решая задачу, проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага. Иногда при реализации плана замените термины и символы их **определениями**.

**При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условиях объектов".**

**5 этап** – запись ответа. Этот этап включает в себя три очень важных момента:

- проверка решения задачи (после того как решение осуществлено необходимо убедиться, что это решение правильное, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи);
- исследование задачи (необходимо еще раз произвести исследование задачи, а именно установить, при каких условиях задача имеет решение и притом, сколько различных решений в каждом отдельном случае; при каких условиях задача вообще не имеет решения и т.д.)
- формирование ответа задачи.

Сегодня мы решим несколько задач разными способами. Откройте карточки с заданиями (см. [приложение 1](#))

### **Методы решения задач:**

#### **1. Метод рассуждений**

**Основная идея метода:** последовательно проводя рассуждения по содержанию и условию задачи сделать правильный вывод. Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

В методике рассуждений при решении задач помогают: чертежи, краткие записи, умение выбирать информацию, умение пользоваться правилом перебора.

#### **Задача № 1.**



Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый

из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

**Решение:** Имеется три утверждения. Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно. Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно. Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе - ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

**Ответ:** Сергей изучает китайский язык, Михаил - японский, Вадим - арабский.

**Задача № 2.** В поездке пятеро друзей - Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша, познакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии, причём каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение:

Дима сказал: "Моя фамилия - Мишин, а фамилия Бориса - Хохлов". Антон сказал: "Мишин - это моя фамилия, а фамилия Вадима - Белкин". Борис сказал: "Фамилия Вадима - Тихонов, а моя фамилия - Мишин". Вадим сказал: "Моя фамилия - Белкин, а фамилия Гриши - Чехов". Гриша сказал: "Да, моя фамилия Чехов, а фамилия Антона - Тихонов".

Какую фамилию носит каждый из друзей?

**Решение:** Обозначим имена и фамилии заглавными буквами. Например: АБ, где буквы А и Б соответствуют начальным буквам имени и фамилии.

Зафиксируем высказывания каждого из друзей:

- ДМ и БХ;
- АМ и ВБ;
- ВТ и БМ;
- ВБ и ГЧ;
- ГЧ и АТ.

Допустим сначала, что истинно ДМ. Но, если истинно ДМ, то у Антона и у Бориса должны быть другие фамилии, значит АМ и БМ ложно. Но если АМ и БМ ложны, то должны быть истинны ВБ и ВТ, но ВБ и ВТ одновременно истинными быть не могут.

Значит, остается другой случай: истинно БХ. Этот случай приводит к цепочке умозаключений: БХ истинно БМ ложно ВТ истинно АТ ложно ГЧ истинно ВБ ложно АМ истинно.

**Ответ:** Борис - Хохлов, Вадим - Тихонов, Гриша - Чехов, Антон - Мишин, Дима - Белкин.

## 2. Метод таблиц

**Основная идея метода:** При использовании данного способа главное – построить таблицу, строки которой соответствуют элементам одного из рассматриваемых в задаче множеств, а столбцы – элементам другого. Часто при решении логических задач используют таблицы, в связи с тем, что задачи могут содержать много условий, которые все сразу трудно удержать в голове. Поэтому ученики должны составить таблицу. Она составляется при внимательном прочтении и анализе условия задачи, после чего вся содержащаяся информация в задаче отображается в таблице. Такая обработка условия данных задачи значительно облегчает ее решение, а иногда является единственным способом решения. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или ее ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи.

**Задача № 3: В каких квартирах живут котятка?**

В квартирах № 1, 2, 3 живут три котёнка - белый, чёрный, рыжий. В квартирах № 1 и 2 живут не чёрные котятка. Белый котёнок живёт не в квартире № 1. В какой квартире, живёт какой котёнок?

Кто, Где?	1	2	3
Б	-	+	-
Ч	-	-	+
Р	+	-	-

**Решение:** 1. Так как чёрный котёнок не живёт в квартирах № 1 и 2 ( по условию ), значит, чёрный живёт в квартире № 3.

2. Так как чёрный живёт в квартире № 3 ( по доказательству ), значит белый и рыжий не живут в квартире № 3.

3. Так как белый котёнок не живёт в квартире № 1 ( по условию ) и не в квартире № 3 ( по доказательству ), значит, белый живёт - в № 2.

4. Так как белый живёт - в №2 ( по доказательству ), значит, рыжий не живёт - в №2.

5. Так как рыжий не живёт - в №2 и 3(по доказательству ), значит, рыжий живёт № 1.

**Ответ:** белый живёт в квартире № 2, чёрный - в № 3, рыжий - в № 1 .

**Задача № 4: Кто есть кто?** В одном доме живут три товарища - школьники Боря, Вася и Дима.

Один из них играет в футбольной команде, другой пишет стихи, а третий лучше своих друзей играет в шахматы.



Известно, что: 1) Васин друг с огорчением сказал: «Вчера я не сумел реализовать пенальти»; 2) товарищ поэта сказал: « Дима! Написал бы ты стих и для нашей футбольной команды». Назовите имена футболиста, поэта и шахматиста.



**Решение:** Из условия (1) видно, что Вася не является футболистом, а из условия (2), что Дима - поэт и, значит, не футболист. Получили: Боря - футболист, Дима - поэт, Вася - шахматист. Как видите, всё очень просто. Надо только внимательно анализировать условие и делать правильные выводы.



**Ответ:** Боря - футболист, Дима - поэт, Вася - шахматист.

### 3. Метод графов

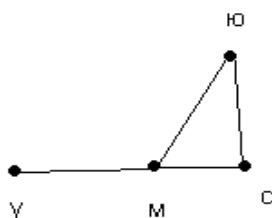
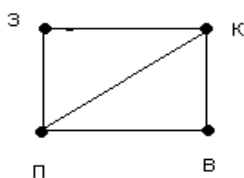
Слово «граф» в математической литературе появилось совсем недавно. Понятие графа используется не только в математике, но и в технике и даже в повседневной жизни под разными названиями – схема, диаграмма.

Особенно большую помощь графы оказывают при решении логических задач. Представляя изучаемые объекты в наглядной форме, «графы» помогают держать в памяти многочисленные факты, содержащиеся в условии задачи, устанавливать связь между ними.

**Основная идея метода:** При использовании данного способа главное – построить *граф* — это совокупность объектов со связями между ними. Объекты представляются как вершины, или узлы графа (они обозначаются точками), а связи — как дуги, или рёбра. Употребляю сплошную или штриховую линии, или линии со стрелками.

**Задача № 5:** Между планетами введено космическое сообщение по следующим маршрутам: З-К, П-В, З-П, П-К, К-В, У-М, М-С, С-Ю, Ю-М, М-У. Можно ли добраться с З до М?

**Решение:** Составим схему-граф маршрутов:



Мы видим, что от З до М добраться нельзя.

**Ответ:** нельзя.

**Задача № 6:** В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что у одного из нас белые, у другого черные, а у третьего рыжие волосы, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии», - заметил черноволосый. «Ты прав», - сказал Белов. Какого цвета волосы у художника.

**Решение:** «Ни у кого цвет волос не соответствует фамилии» заметил черноволосый. «Ты прав», - сказал Белов. Значит Белов не черноволосый. Белов может быть только рыжеволосым. Чернов белым, а Рыжов чёрным. Так как художником является Рыжов, а он черноволос, имеем ответ.

**Ответ:** художник черноволос

#### 4. Метод кругов Эйлера.

**Основная идея метода:** Задачи, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи.

**Круги Эйлера** — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Метод Эйлера является незаменимым при решении некоторых задач, а также упрощает рассуждения. Однако прежде чем приступить к решению задачи, нужно проанализировать условие. Иногда с помощью арифметических действий решить задачу легче.

**Задача № 7:** Ребята из нашего класса любят мороженное. Известно, что 15 ребят любят шоколадное, 11 – пломбир, из них 6 любят и шоколадное и пломбир. Сколько человек любят пломбир?

**Решение:** Чертим два множества следующим образом: 6 человек, которые любят и шоколадное и пломбир, помещаем в пересечение множеств.

15 – 6 = 9 – человек, которые любят только шоколадное.

11 – 6 = 5 – человек, которые любят только пломбир

**Ответ:** 5 человек любят только пломбир



**Задача № 8:** Ребята нашего класса имеют возможность посещать три факультатива: по рисованию, по литературе и по математике. Известно, что 6 человек из класса посещает только математику, 2 – только рисование, 5 – только литературу. Только математику и рисование посещает 3 человека, рисование и литературу – 4, математику и литературу – 2. Один человек из класса посещает все три факультатива. Найти:

1. Сколько всего человек в классе?
2. Сколько человек посещает рисование?
3. Сколько человек посещает математику?

	МАТЕМАТИКА	РИСОВАНИЕ	ЛИТЕРАТУРА
Посещают только факультатив по литературе	6	3	2
Посещают только математику	2		4
Посещают только рисование		5	
Посещают 2 факультатива			5
Посещают все 3 факультатива			1

**Решение:** 1) Сначала отметим все области на кругах. На схеме видим, что для ответа на первый вопрос нужно сложить все числа:

$$6+2+5+3+4+2+1=23 \text{ (всего человек в классе)}$$

2) Посещают рисование (складываем 4 числа, входящих в круг):

$$2+3+4+1=10$$

3) Посещают математику

$$6+3+1+2=12$$

**Ответ:** 23-всего, 10-рисование, 12-математика

**Рефлексия (на доске незаконченные фразы)**

1. сегодня я узнал...
2. было интересно...
3. было трудно...
4. я выполнял задания...
5. я понял, что...
6. теперь я могу...
7. я почувствовал, что...
8. я приобрел...
9. я научился...
10. у меня получилось ...
11. я смог...
12. я попробую...
13. меня удивило...
14. урок дал мне для жизни...
15. мне захотелось...

*Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!*  
**Д. Пойа**

**Вывод:**

Истина и логика взаимосвязаны, поэтому значение логики невозможно переоценить. Логика помогает доказывать истинные суждения и опровергать ложные, она учит мыслить четко, лаконично, правильно. Логика нужна всем людям, работникам самых различных профессий.

Как правило, задачу можно решить несколькими способами. Чтобы выбрать наиболее простой и эффективный способ для каждой конкретной задачи, необходимо знать все эти способы. Известно множество различных способов решения логических задач. Мы рассмотрели только некоторые из них. Существуют ещё метод математического бильярда, метод блок-схем и пр. Познакомившись с разными видами логических задач и методами их решения, вы сможете полученные знания применить в своей учебной деятельности, самостоятельно выбрать тот или иной метод решения задачи, применить изученные методы к решению проблемы в реальной ситуации. Цель и задачи работы, которые были поставлены в самом начале, решены. Да, существует много способов решения различных логических заданий. Но, к сожалению, решение их всех не может быть сведено к какому-нибудь одному методу, пригодному всегда. Поэтому у вас всегда есть право выбора.

Д/з решить четыре задачи любым способом (см. [приложение 1](#))

Список литературы

1. Севрюков П.Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике – М.: Илекса, 2007.
2. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад /Москва: Наука 1975.
3. Мальцев Ю.Н., Саженок А.Н, Олимпиадные задачи по математике; Барнаул 1994.
4. Горбачев, Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике— Москва: Просвещение, 2004.
5. МАТЕМАТИКА: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои; Москва, «Первое сентября», 2004

6. Мельников, О. И. Занимательные задачи по теории графов / О. И. Мельников. — Мн.: ТетраСистемс, 2001.
7. Шарыгин, И. Ф. Задачи на смекалку / И. Ф. Шарыгин, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2003.

#### Интернет-источники

Источник: [0zd.ru>matematika/metody\\_resheniya...zadach\\_i.html](http://0zd.ru/matematika/metody_resheniya...zadach_i.html)

Источник: <http://5fan.ru/wievjob.php?id=96>

Источник: <http://5fan.ru/wievjob.php?id=96>

## Занятие 7-9- февраль-март

### Тема «Инварианты»

*Инвариант от латинского **invarians**, в родительном падеже **invariantis** – неизменяющийся. Был введён английским математиком Джеймсом Джозефом Сильвестром (03/11/1814 – 15/3/1897) в 1851 году.*

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскладки и т. п. Причем, применение четности – одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1. четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых;
2. знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Возможные варианты	Пример
$H + H = Ч$	$3 + 5 = 8$
$Ч + Ч = Ч$	$4 + 6 = 10$
$H + Ч = H$	$5 + 4 = 9$
$H \times H = H$	$3 \times 5 = 15$
$Ч \times Ч = Ч$	$4 \times 6 = 24$
$H \times Ч = Ч$	$5 \times 4 = 20$

## I.

### Работа с учителем:

1. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?

#### *РЕШЕНИЕ:*

Сумма 15 исходных чисел равна 7. 7 - число - нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом.

	1 вариант		2 вариант		3 вариант	
Вид числа	“0”	“1”	“0”	“1”	“0”	“1”
Было	8	7	8	7	8	7
Сумма всех чисел	7		7		7	
Вычеркнули	-2		-1	-1		-2
Дописали	1			1	1	
Стало	7	7	7	7	9	5
Сумма всех чисел	7		7		5	
Количество чисел	14		14		14	

***Что является инвариантом в данном случае?***

Таким образом, мы замечаем, что после выполнения данной операции получается на 1 число на доске меньше, причём сумма оставшихся чисел всё время остаётся нечётной. Так как 1 – нечётное число, а 0 – чётное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается нечётное число 1.



**2. На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно? А если шестеренок 14?**

*РЕШЕНИЕ:* Пусть первая шестеренка вращается по часовой стрелке, тогда вторая - против часовой стрелки, третья - по часовой стрелке и т. д. Получим, что двенадцатая будет вращаться против часовой стрелки, а тринадцатая - по часовой стрелке.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я	13-я	14-я

*Что является инвариантом в данном случае?*

Значит, первая должна вращаться против часовой, что противоречит тому, что она вращается по часовой стрелке. Поэтому, все 13 шестеренок вращаться одновременно не могут. А вот 14 уже могут.

*ВЫВОД:* Часто при решении подобного рода задач важно найти чередующиеся объекты.

**3. Все костяшки домино выложены в цепь. На одном конце цепи оказалось 3 очка. Сколько на другом конце?**

*РЕШЕНИЕ:* рассмотрим костяшки домино их 28:

Заметим, что "0" - 8 штук, "1" - 8 штук и т.д., то есть **чётное** число, а значит, каждому числу соответствует парное ему число.

*Что является инвариантом в данном случае? (парность)*

Так как при игре в домино в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи **будет 3 очка.**

P.S:

Всего костяшек с тройкой на конце 7:

0-3, 1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-3, 6-3.

Костяшка 3-3 имеет "тройку" на обоих концах. Без нее остается 6 костяшек. Так как при игре в домино в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи **будет 3 очка.**

*ВЫВОД.* При решении аналогичных задач полезно иногда объекты разбивать на пары.

**4. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?**

*РЕШЕНИЕ.*

Заметим, что:

15 – нечётное число,

50 – чётное,

1 и 5 – нечётные слагаемые

Так как сумма 15 нечетных чисел является числом нечетным, а 50 - число четное, то разменять 50 рублей на 15 монет по 1 и 5 рублей **нельзя**.

4. **Квадрат 5x5** заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел отрицательно.

*РЕШЕНИЕ:* найдём произведение всех чисел в квадрате:

так как произведение чисел в одной строке отрицательно, то произведение всех чисел (5 строк) будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах (5 столбцов). А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

*ВЫВОД:* В задаче использовалась идея – нахождение произведения чисел.

## II. Для индивидуальной работы.

1. Можно ли доску размером 5x5 заполнить доминошками размером 1x2?

*РЕШЕНИЕ.* Нет, так как общее число клеток - 25 не делится на 2.

2. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них расположить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

*РЕШЕНИЕ.* Если число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то характер четности числа арбузов в этих корзинах будет разным.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я	13-я	14-я	15-я	16-я
Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н

Тогда четность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет четное число арбузов, а в половине нечетное.

Так как четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых, то общее число арбузов в 8 корзинах с четным числом арбузов и в 8 корзинах с нечетным числом арбузов будет четным. По условию же всего арбузов - 55, а это нечетное число. Значит, разложить нельзя.

Ответ: нельзя.

**3. Сумма 2002 натуральных чисел - число нечетное. Каким числом: четным или нечетным является произведение этих чисел?**

*РЕШЕНИЕ:*

Так как сумма 2002 чисел - число нечетное, то число нечетных слагаемых - нечетно. Тогда среди 2002 чисел есть хотя бы одно четное число. А значит, произведение 2002 чисел будет четным числом.

Ответ: чётное число.

**4. Учитель написал на листке бумаги число 10. 25 учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу - как хочет. Может ли в результате получиться число 0?**

*РЕШЕНИЕ.* От прибавления или вычитания единицы меняется характер четности числа.

Поэтому, если 25 раз (*нечётное число*) менять характер четности числа 10, то в результате получится нечетное число. Следовательно, число 0 получиться не может.

Ответ: не может.

**5. В вершинах куба записаны числа 2, 0, 0, 3, 1, 9, 5, 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?**

*РЕШЕНИЕ.* Так как сумма данных чисел: число 27 - нечетное, а при прибавлении двух одинаковых целых чисел четность суммы не меняется.

Возможные варианты	Пример
$H + H = Ч$	$27 + Ч = H$
$Ч + Ч = Ч$	$27 + Ч = H$

Т.о. получить все нули во всех вершинах **не получится** (сумма восьми нулей – число четное).

Ответ: нельзя.

### **III. Для домашней работы.**

1. Квадратная доска 6x6 заполнена костяшками домино 1x2. Докажите, что можно провести вертикальный и горизонтальный разрез этой доски, не пересекающий ни одной из костяшек домино.
2. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от двух стертых (2

вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2. Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одна - единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.

3. Числа 0, 1, 2,...,9 записаны по кругу. За один ход разрешается прибавить к двум соседним числам одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить десять нулей?

## Литература

1. И. Ф. Шарыгин, А. В. Шевкин. Задачи на смекалку. 5 – 6 кл. – Г. Москва, изд. “Просвещение”, 2006 г.
2. А. Ф. Фарков. Готовимся к олимпиадам по математике. Г. Москва, изд. “Экзамен”, 2007 г.
3. В. А. Гусев, А. П. Комбаров. Математическая разминка. Г. Москва, изд. “Просвещение”. 2005 г

## Блок 2

Повторение ранее изученного:

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании.

В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскладки и т. п. При этом, применение четности - одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1. четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых;
2. знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Возможные варианты	Пример
$Н + Н = Ч$	$3 + 5 = 8$
$Ч + Ч = Ч$	$4 + 6 = 10$

$H + Ч = H$	$5 + 4 = 9$
$H \times H = H$	$3 \times 5 = 15$
$Ч \times Ч = Ч$	$4 \times 6 = 24$
$H \times Ч = Ч$	$5 \times 4 = 20$

### Задачи для работы в классе

#### Выделение части объекта.

Основная идея такова: выделить в каждом объекте какую-то часть, в которой изменения, вызываемые разрешенными операциями, выглядят особенно просто.

1. В таблице  $3 \times 3$  угловая клетка закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Доказательство. Достаточно проследить за угловыми клетками.

1) 2)

1 чёрная и 3 белые 1 чёрная и 3 белые

3) 4)

3 чёрные и 1 белая 3 чёрные и 1 белая

Характер чётности числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

Раз исходно одна клетка была чёрной, то не может оказаться так, что не будет ни одной чёрной клетки.

Ответ: невозможно.

2. В таблице  $4 \times 4$  знаки “+” и “-” расставлены так, как показано на рисунке.

+	+	-	+
---	---	---	---

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей

(в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?

Решение.

Заменим плюсы и минусы числами 1 и  $-1$ . В качестве инварианта можно взять произведение чисел, находящихся в клетках, которые заштрихованы на рисунке, поскольку оно в результате разрешенной операции все время сохраняет первоначальное значение равное  $-1$ .

	+1	- 1	
+1			+1
+1			+1
	+1	+1	

Но, значит, среди заштрихованных чисел всегда будет оставаться  $-1$ , следовательно, получить таблицу, не содержащую ни одного минуса, нельзя.

Ответ: нельзя.

Перестановки

3. Три кузнечика играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не через двух сразу!). Могут ли они после 1991 прыжка оказаться на прежних местах?

Решение:

Обозначим кузнечиков А, В и С.

Назовём расстановки кузнечиков АВС, САВ и ВСА (слева направо) правильными, а ВАС, АСВ и СВА – неправильными

При любом прыжке тип расстановки меняется.

Так что, если исходная расстановка была правильная, то после 1991 прыжка расстановка будет неправильная, так как 1991 – число нечётное, и кузнечики не смогут оказаться на прежних местах.

Ответ: нет.

**4. Числа 1, 2, 3, ..., n** расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечётное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел 1, 2, 3, ..., n.

Доказательство:

Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  – произвольная перестановка из чисел 1, 2, 3, ..., n. Будем говорить, что два числа образуют в этой перестановке **инверсию**, если большее из этих чисел предшествует меньшему.

Число перестановок	Возможный вариант	Число инверсий	Возможный вариант	Число инверсий	Характер чётности числа инверсий
0 - Чётное	1;2;3;4;5;6	0 инверсий			Чётное
1 - нечётное	2;1;3;4;5;6	1 инверсия			нечётное
2 - Чётное	2;1; 4;3; 5;6	2 инверсии			Чётное
3 - нечётное	2;4;1;3; 5;6	1 инверсия	2;1; 4;3; 6;5;	3 инверсии	нечётное
4	2;4;1;3; 6;5;	2 инверсии	2;1; 3; 4;6;5;	2 инверсии	Чётное
5	4; 2;1;3; 6;5	3 инверсии	1;2;3;4;6;5;	1 инверсия	нечётное
6	1;2; 4;3;6;5;	2			Чётное

		инверсии			
7	1;2;3;4; 6;5;	1 инверсия			нечётное
8	1;2;3;4;5;6	0 инверсий			Чётное

Поменяв местами два соседних числа в перестановке, мы увеличим или уменьшим число инверсий на 1. Прделав же нечётное число таких операций, мы изменим, характер чётности числа инверсий, а значит, изменим и перестановку.

Ответ: нет.

**5. В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автомобилей. По правилам гонки автомобили могут обгонять друг друга, но при этом запрещён двойной обгон. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было чётное число обгонов.**

Доказательство:

Присвоим автомобилям номера 1, 2, 3,.....,24, 25 в том порядке, в каком они располагаются на старте. В центре автодрома установим световое табло, на котором после каждого обгона будем указывать номера автомобилей в том порядке, в каком они следуют. Тогда обгон, приводит к тому, что на световом табло меняются местами два соседних числа. И теперь наша задача становится похожей на предыдущую.

Запишем наши рассуждения в виде таблицы:

Число обгонов	0	1	2	3	4	5	6
Число инвариантов	0	1	2	3 или 1	4 или 0	5 или 1	6, 0 или 2
Характер чётности числа инвариантов	Чётное	нечётное	Чётное	нечётное	Чётное	нечётное	Чётное

Таким образом, если бы общее число обгонов было нечётным, то нечётным бы оказалось и общее число перестановок соседних чисел, что изменило бы порядок следования автомобилей. А раз они финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали, то во время гонки было чётное число оборотов.



Ответ: чётное число обгонов.

### Раскраска

Обычно поиск нужной раскраски нацелен на доказательство отрицательного ответа.

6. Шахматный конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Доказательство:

Шахматный конь ходит с чёрного поля на белое и наоборот.

Например, чтобы попасть с **чёрного** поля снова на **чёрное**, надо сделать **как минимум два хода**. Так что для того, чтобы вернуться на исходное поле, надо сделать чётное число ходов.

7. Можно ли покрыть шахматную доску костяшками домино 1\*2 так, чтобы свободными остались только клетки a1 и h8?

Решение:

Каждая костяшка домино покрывает два поля: чёрное и белое. Чёрных и белых полей поровну, так что покрывать так, чтобы остались свободными два чёрных поля, нельзя.

Ответ: нельзя.

8. На доске 2008 x 2008 двое игроков по очереди красят клетки в чёрный цвет. Первый имеет право закрашивать по одной клетке, а второй - “уголок” из трёх клеток. Каждую клетку можно закрашивать один раз. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

Выигрышная стратегия для второго игрока: мысленно разбив квадрат **2008 x 2008** на квадратики 2 x 2, второй игрок, после того как первый закрасит одну клетку в одном из квадратов 2 x 2, “докрашивает” его.

В силу того, что произведение **2008 x 2008** делится на  $4 = 2 \times 2$ , то очевидно, что тогда последний ход всегда останется за вторым игроком.

Ответ: выигрывает второй игрок.

9. Продолжение предыдущей задачи. Изменится ли ответ, если первый имеет право закрашивать квадрат 2 x 2?

Решение:

Выигрышная стратегия: своим ходом второй игрок может создать себе в одном из углов доски место для хода. Заметим, что первый игрок закрашивает больший участок доски, чем второй. После того как будут исчерпаны ходы в остальной части доски (а это рано или поздно наступит), второй будет иметь “запасный” ход “в угол”.

*Ответ:* не изменится, выигрывает второй игрок.

**10.** Пусть  $A$  – число, записанное с помощью  $3^{1998}$ . Обозначим  $A_1 = S(A)$  сумму цифр числа  $A$ ,  $A_2 = S(A_1)$ ,  $A_3 = S(A_2)$ . Найдите  $A_4 = S(A_3)$ .

*Решение:*

Число  $A$  составлено из одних девяток, следовательно, оно делится на 9. При суммировании цифр числа это свойство сохраняется, т. е. является инвариантом преобразования  $(x)$ .

$A =$

$$A_1 = S(A) = 9+9+9+\dots+9 = 9 \times 3^{1998} = 9 \times 9^{999} = 9^{1000} < 10^{1000}.$$

Число  $10^{1000}$  записано при помощи 1001 цифры, т.о., полученное число  $A_1$  записано с помощью менее, чем 1000 цифр.

Число  $A_2 = S(A_1)$  делится на 9, а значит,

$A_2 = S(A_1) < 9 \times 1000 = 9000 = 9 \times 10^3 < 10 \times 10^3 = 10^4$ , так что  $A_2$  записано не более, чем четырьмя цифрами.

$A_3 = S(A_2) < 9 \times 4 = 36$  и делится на 9, т.е.  $A_3$  может принимать только значения 9, 18, 27. Во всех этих случаях  $S(A_3) = 9$ .

*Ответ:* 9.

## МАЛАЯ ОЛИМПИАДА

1. В таблице 6 x 6 знаки “+” и “-” расставлены так, как показано на рисунке. Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?

+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

### Решение

Снова заменим плюсы и минусы на  $+1$  и  $-1$ .

Инвариантом будет произведение чисел, стоящих в чёрных клетках. И раз оно равно числу  $-1$ , то нельзя получить таблицу, не содержащую ни одного минуса.

*Ответ:* нельзя.

**2.** Докажите, что шахматную доску  $8 \times 8$  нельзя замостить 15 прямоугольными фигурками  $1 \times 4$  и одной фигурой, указанной на рисунке. (Квадраты шахматной доски и фигурки одинаковы).

### Доказательство

Используем раскраску доски чёрными и белыми, чередующимися по цвету строками. Чёрных и белых квадратов оказывается поровну – 32.

Как бы мы ни располагали данную на рисунке фигуру, она будет покрывать три квадрата одного цвета и один другого. Прямоугольники  $1 \times 4$  либо покрывают одинаковое количество чёрных и белых квадратов, либо – 4 квадрата только одного цвета. Так что всякий раз, покрывая ими из 32 – ух по два, то по четыре квадрата, никак не останется 1 или 3 свободных для указанной фигурки.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

**1.** Может ли шахматный конь пройти с поля  $a1$  на поле  $n8$ , побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

### Решение

Поля  $a1$  и  $n8$  оба чёрные, а чёрных и белых полей на шахматной доске поровну – 32. При проходе цвета полей будут чередоваться, так что закончить обход на поле того же цвета нельзя.

Ответ: нельзя.

2. На доске написано число  $8^n$ . У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если  $n = 1989$ ?

Решение

Вспомним доказательства признака делимости на 9 и заметим, что число и сумма его цифр дают одинаковый остаток при делении на 9. Какие же остатки при делении на 9 дают степени восьмёрки? Число  $8^1$  при делении на 9 даёт в остатке 8;  $8^2 - 1$ ;  $8^3 - 8$ ,  $8^4 - 1$ ;  $8^5 - 8$  и т. д. Степени с чётным показателем дают в остатке 1, а степени с нечётным показателем дают в остатке 8. Значит,  $8^{1989}$  при делении на 9 даёт в остатке 8. Вернёмся к условию задачи. Описанные в условии последовательные вычисления всё время будут давать числа, которые при делении на 9 дают в остатке 8. Так что, когда получится однозначное число, то это и будет само число 8.

Ответ: 8.

3. На доске написано 8 плюсов и 13 минусов. Разрешается стирать любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется после выполнения 20 таких операций?

Решение

Заменяя все плюсы нулями, а минусы – единицами, заметим, что сумма двух стираемых чисел имеет тот же характер чётности, что и число, записываемое вместо них. Так как сумма всех чисел была нечётной (13), то и последнее оставшееся число будет нечётным, т. е. единицей, и, значит, на доске останется минус.

4. Дно прямоугольной коробки было вымощено прямоугольными плитками  $1 \times 4$  и  $2 \times 2$ . Плитки высыпали из коробки, и одна плитка  $2 \times 2$  потерялась. Её заменили на плитку  $1 \times 4$ . Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.

Доказательство

Рассмотрим раскраску в четыре цвета, указанную на рисунке:

1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1

2	3	2	3	2
1	4	1	4	1

Тогда каждая плитка  $2 \times 2$  содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка  $1 \times 4$  – или ни одной или две клетки цвета 1. Следовательно, характер чётности числа плиток  $2 \times 2$  должен совпадать с характером чётности числа клеток цвета 1. Но после замены плиток характер чётности числа плиток  $2 \times 2$  изменится. Это и доказывает то, что замостить дно коробки не удастся.

## Литература

1. И. Ф. Шарыгин, А. В. Шевкин. Задачи на смекалку. 5 – 6 кл. – Г. Москва, изд. “Просвещение”, 2006 г.
2. А. Ф. Фарков. Готовимся к олимпиадам по математике. Г. Москва, изд. “Экзамен”, 2007 г.
3. В. А. Гусев, А. П. Комбаров. Математическая разминка. Г. Москва, изд. “Просвещение”. 2005 г

## Блок 3

(ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ “ИНВАРИАНТЫ”)

### Повторение ранее изученного

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании.

В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскладки и т. п. Причем, применение четности - одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1. четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых;
2. знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

### Задачи для работы в классе

#### Чётность

№ 1 Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 045?

РЕШЕНИЕ:

Пусть  $45\ 045 = (x - y) * x * y$ . Рассмотрим случаи:

1.  $x - \text{чётное}, y - \text{чётное}$

$(x - y) - \text{чётное}$  и  $x * y - \text{чётное}$ , а произведение двух чётных чисел чётно, поскольку  $45\ 045$  число нечётное, то этот вариант невозможен.

2.  $x - \text{нечётное}, y - \text{чётное}$  или  $y - \text{нечётное}, x - \text{чётное}$

$(x - y) - \text{нечётное}$  и  $x * y - \text{чётное}$ , а произведение нечётного и чётного чисел чётно, поскольку  $45\ 045$  число нечётное, то этот вариант невозможен.

3.  $x - \text{нечётное}, y - \text{нечётное}$

$(x - y) - \text{чётное}$  и  $x * y - \text{нечётное}$ , а произведение нечётного и чётного чисел чётно, поскольку  $45\ 045$  число нечётное, то этот вариант невозможен.

ОТВЕТ: **нет**.

**№ 2** В вершинах куба записаны числа  $0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0$ . За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?

*РЕШЕНИЕ.* Так как сумма данных чисел: число  $1 - \text{нечётное}$ , а при прибавлении двух одинаковых целых чисел чётность суммы не меняется.

Возможные варианты	Пример
$\text{Н} + \text{Н} = \text{Ч}$	$1 + \text{Ч} = \text{Н}$
$\text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}$	$1 + \text{Ч} = \text{Н}$

Т.о. получить все нули во всех вершинах **не получится**

(сумма восьми нулей – число чётное).

ОТВЕТ: **нет**.

**№ 3.** Вдоль дороги растут  $2002$  ели. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, с которого она взлетела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели вновь сидело по одной вороне?

РЕШЕНИЕ:

С чего начать? А если так: Занумеруем ели по порядку с  $1$  по  $2002$ . Заметим, что вороны, сидевшие на елях с нечётными номерами, перелетают на ели с нечётными номерами.

Соответственно вороны, сидевшие на елях с четными номерами, перелетят на ели с четными номерами. Рассмотрим ели с нечетными номерами: покрасим их в два цвета: Белый цвет: 1,5,9...2001. Таких елей 501. Черный цвет: 3,7,11...1999. Таких елей 500. Ели вдоль дороги: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, .....,2002. Заметим, что ворона с “белой” ели, перелетит на “черную”, и наоборот. Однако черных елей 500, а белых – 501. Значит, по крайней мере, на одну из белых елей не сядет ни одной вороны.

ОТВЕТ: не могло.

№ 4. На доске написано в строку 2003 числа. Доказать, что среди них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 2002 чисел?

РЕШЕНИЕ: Очевидно, надо использовать следующее утверждение: *четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых*. Например:  $1+2+3=6$

$$1+2+3+5=11$$

Для числа 2003 (нечет.) рассмотрим три случая:

1случай:

среди 2003 целых чисел есть четные и нечетные. Если количество нечетных чисел нечетно, то стираем любое из них. Если количество нечетных четно, то из 2003 целых чисел есть хотя бы одно четное. Его и стираем.

2случай:

пусть все 2003 числа нечетные. Стираем любое из них.

3случай:

пусть 2003 числа четное. Стираем любое из них.

Для *числа* *2002*.

Если они все нечетные, то после стирания одного из них сумма останется нечетной. Остальные случаи рассматривать нет смысла. Поэтому для 2002 целых чисел это неверно. Ч.Т.Д.

### Раскраска

Обычно поиск нужной раскраски нацелен на доказательство отрицательного ответа.

№ 5 Можно ли разрезать квадратный лист клетчатой бумаги (10x10 клеток) на четырёхклеточные фигуры вида (см. рис. 1)?

**рис. 1**

РЕШЕНИЕ: нельзя, так как если раскрасить клетки в шахматном порядке, то закрашенных клеток будет 50 и их нельзя распределить по фигурам заданного вида, поскольку таких фигур должно быть 25, а закрашенных клеток, каждая из них может содержать лишь нечётное количество.

ОТВЕТ: **нельзя.**

### Чередование

Часто при решении подобного рода задач важно найти чередующиеся объекты.

**№ 6** Можно ли обойти доску (рис. 2), начав с отмеченной клетки, побывав на каждой клетке только 1 раз. Переходить с клетки на клетку можно только через сторону клетки, а не через угол. Возвращаться на исходную клетку не обязательно.

Рис.2

РЕШЕНИЕ: Нетрудно подсчитать, что синих полей на доске меньше, чем белых. Если мы начнём обход с синего поля, то получим чередование полей  $c - б - c - б - \dots$ . В такой цепочке синих полей не меньше, чем белых, поэтому обойти все синие поля таким образом нельзя.

ОТВЕТ: **нельзя.**

**№ 7.** На плоскости лежат три шайбы. Хоккеист бьёт по одной из них, так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 2003 ударов?

РЕШЕНИЕ: Вернуть шайбы на свои места - это значит сохранить направление движения, например, от А до В. Пусть первоначальное положение шайб А-В-С.

Попробуем выполнить рисунки:

Число ударов	Исходное А-В-С	1 удар	2 удар	3 удар	...	2003 удар
Направление положения шайб	против часовой				...	

Заметим, что после чётного числа ударов ориентация “против часовой стрелки” не меняется, а после нечётного числа ударов ориентация “по часовой стрелки” меняется. Инвариантом является сохранение четного числа ударов, так как при этом сохраняется исходное положение шайб. Значит, после 2003 ударов шайбы не удастся вернуть на свои места.

ОТВЕТ: **нет, нельзя.**

### Остатки от деления



Разделить с остатком целое число  $a$  на натуральное число  $b$  – значит найти такое целое число  $q$  (НЕПОЛНОЕ ЧАСТНОЕ) и такое неотрицательное число  $r$  (ОСТАТОК), что  $a = b \times q + r$  и  $r < b$ .

Например:  $179 = 12 \times 14 + 11$  означает, что 179 при делении на 12 даёт неполное частное 14 и остаток 11.

В общем виде:  $4n - 1$  – формула чисел, кратных 4. Вычитая из них по 1, получим числа вида  $4n - 1$ , при делении на 4, дающие в остатке 3. Поскольку  $4n - 1 = 4(n - 1) + 3$ . Те же самые числа, при делении на 4, дающие в остатке 3, можно задать формулой  $4n + 3$ , т.к.  $4n + 1 = 4(n + 1) - 3$ .

№ 8 У старшего дракона с планеты Хемтам 19 голов. Отважный рыцарь придумал аппарат с помощью которого можно одним ударом отрубить ровно 12, 14, 21 или 340 голов, но после этого у дракона отрастают взамен соответственно 33, 1998, 0 или 4 головы. Если все головы отрублены, новые не вырастают. Сможет ли рыцарь победить дракона?

**РЕШЕНИЕ:** Победить дракона значит оставить его без голов.

Попробуем использовать в качестве инварианта остаток от деления. Пусть у дракона  $n$ -голов.

Было	$n$ -голов	$n$ -голов	$n$ -голов	$n$ -голов
Отрублено	12	14	21	340
Осталось	$n + (33 - 12) = n + 21$	$n + (1988 - 14) = n + 1974$	$n + (0 - 21) = n - 21$	$n + (4 - 340) = n - 336$

Рассмотрим числа 21, 1974, 336. Они делятся без остатка на 3. Значит, остаток от деления на 3 числа голов останется постоянным и будет зависеть от числа  $n$ . Остаток от деления числа 19 на 3 равен 1, то число голов у дракона не может стать равным 0.  
ОТВЕТ: не сможет.

### МАЛАЯ ОЛИМПИАДА

№ 1 Можно ли разбить на “доминошки” (каждая состоит из двух клеток) шахматную доску без противоположных углов  $a1$  и  $h8$ ?

РЕШЕНИЕ: нельзя, так как каждая “доминошка” покрывает одну белую и одну чёрную клетки. Поэтому среди покрытых “доминошками” клеток белых и чёрных должно быть поровну. На шахматной доске  $8 \times 8$  с вырезанными левой нижней и правой верхней угловыми клетками это не так: клеток одного цвета на 2 больше, чем другого.

ОТВЕТ: нельзя.

№ 2 В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между числами знаки “+” и “-” так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю? (ПОДСКАЗКА: отрицательные числа тоже бывают чётными и нечётными).

РЕШЕНИЕ: нельзя, так как среди указанных чисел находится 5 – чётных и 5 – нечётных чисел. Сумма “Ч” и “Н” – число нечётное, а 0 – число чётное.

ОТВЕТ: нельзя.

№ 3. На доске написано в строку 1993 числа. Доказать, что среди них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 1992 целых чисел?

РЕШЕНИЕ: Очевидно, надо использовать следующее утверждение: *четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.*

Например:  $1+2+3=6$ ,  $1+2+3+5=11$

Для числа 1993 (нечет.) рассмотрим три случая:

1случай: среди 1993 целых чисел есть четные и нечетные. Если количество нечетных чисел нечетно, то стираем любое из них. Если количество нечетных четно, то из 1993 целых чисел есть хотя бы одно четное. Его и стираем.

2случай: пусть все 1993 числа нечетные. Стираем любое из них.

3случай: пусть 1993 числа четные. Стираем любое из них.

Для  $1992$  числа  $1992$ .

Если они все нечетные, то после стирания одного из них сумма останется нечетной.

Остальные случаи рассматривать нет смысла. Поэтому для 1992 целых чисел это неверно.

Ч.Т.Д

#### ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

№ 1. Докажите, что доску размером 50x50 нельзя разрезать на четырёхклеточные фигуры в форме буквы “Т” (см. рис. 1).

рис. 1

№ 2. По кругу зацеплены 9 шестерёнок: первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой. Могут ли они вращаться?

РЕШЕНИЕ: Пусть первая шестеренка вращается по часовой стрелке, тогда вторая - против часовой стрелки, третья - по часовой стрелке и т. д. Получим, что девятая будет вращаться по часовой стрелке, как и первая, а значит, вращаться они не могут.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я

ОТВЕТ: нет

№ 3. В вершинах куба записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, прибавить по 1. Можно ли за несколько ходов получить во всех вершинах одно и тоже чётное число?

РЕШЕНИЕ. Так как сумма данных чисел: число 21 - нечетное, а при прибавлении двух одинаковых целых чисел, равных 1, четность суммы не меняется:  $H + Ч = H$

Возможные варианты	Пример
$H + H = Ч$	$21 + Ч = H$
$Ч + Ч = Ч$	$21 + Ч = H$

Т.о. получить все чётные числа во всех вершинах не получится

(сумма восьми чётных чисел – число четное).

Ответ: нет, нельзя.

№ 4 (остатки от деления)

Хулиганы Вася и Петя порвали школьную стенгазету, в которой была заметка об их плохой учебе. Причем Вася рвал каждый кусок на 5 частей, а Петя на 9. Заместитель директора школы, заметив такое безобразие, потребовала собрать обрывки стенгазеты. Ребята нашли 1999 обрывков.

Все ли обрывки были найдены?

РЕШЕНИЕ:

Если речь идет о делении на части, то рассмотрим остатки от деления. Пусть газету рвёт Вася (на 5 кусков) и Петя (на 9 кусков): Вася

1 шаг порвал на 5 кусков:

2 шаг 1 кусок порвал ещё на 5 кусков

*получилось 9 кусков.*

Теперь Вася будет дальше рвать некоторые куски на 5, а Петя будет рвать газету на 9 кусков, то число кусков получится:

Число шагов	Количество кусков, полученных Васей	Количество кусков, полученных Петей	Общее количество
1	5	9	14
2	$5-1+5=9$	$9-1+9=17$	26
3	$9-1+5=13$	$17-1+9=25$	38

4	$13-1+5=17$	$25-1+9=33$	50
...			
n	$4n+1$ – числа, дающие при делении на 4 в остатке 1	$4n+1$ – числа, дающие при делении на 4 в остатке 1	$4n+2$ – числа, дающие в остатке 2 при делении на 4

Так как  $1999=499 \times 4 + 3$ , то ученики собрали не все обрывки стенгазеты. ОТВЕТ: нет, не все.

## Занятие № 10-12- апрель- май

### Тема «Решения олимпиадных задач»

Задача 8.1. Найдите наибольшее шестизначное число  $ABCDEF$ , состоящее из различных цифр, такое, что  $DEF = 3 \cdot ABC$ .

(Здесь  $XYZ$  — это число, записываемое цифрами  $X, Y, Z$  в указанном порядке.)

Ответ: 327981.

Решение. Поскольку число  $3 \cdot ABC$  — трёхзначное, то оно меньше 1000, и тогда  $ABC \leq 333$ .

Значения

$$ABC = 333, 332, 331, 330, 329, 328$$

под условие не подходят, так как в числе  $ABCDEF$  не все цифры получаются разными:

$$ABCDEF = 333999, 332996, 331993, 330990, 329987, 328984.$$

Наибольшее число, удовлетворяющее всем условиям, начинается с 327 и равно 327981.

Задача 8.2. Внутри большого квадрата расположили три маленьких квадрата, как показано на рисунке. Площади двух маленьких квадратов и одной из оставшихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь третьего маленького квадрата, обозначенного  $X$ .

Ответ: 42,25.

Решение. Ясно, что длины сторон маленьких квадратов, примыкающих к углам, равны

$$\sqrt{16} = 4 \text{ и } \sqrt{4} = 2. \text{ Обозначим длину стороны квадрата } X \text{ через } x.$$

Посчитаем площадь прямоугольника, состоящего из двух частей, помеченных 47 и  $X$ .

С одной стороны, эта площадь равна  $47 + x^2$

; с другой — произведению длин сторон:

$(4 + x) \cdot (2 + x)$ . Составляем и решаем соответствующее уравнение:

$$47 + x^2 = (4 + x)(2 + x) \Leftrightarrow 47 + x^2 = 8 + 6x + x^2 \Leftrightarrow 39 = 6x \Leftrightarrow x = 6,5.$$

Получается, что неизвестная площадь  $X$  равна  $x$

$$2 = 6,5^2 = 42,25.$$

Задача 8.3. Междугородний автобус совершает рейсовый маршрут из города  $A$  в город

$B$ . По пути от  $A$  до  $B$  есть несколько остановок, на каждой из них выходило 2 человека

и садилось 3. С каждого пассажира водитель взимает плату 8 тугриков за проезд (независимо от того, когда он вошёл и когда вышел).

Известно, что в город  $B$  приехали 22 человека, а выручка водителя составила 320 тугриков. Сколько пассажиров выехало из  $A$ ?

Ответ: 13.

Решение. Выручка водителя составила 320 тугриков при цене билета 8 тугриков; значит, всего  $320/8 = 40$  человек побывали на рейсе и оплатили проезд.

Из этих 40 людей 22 доехали до города  $B$ , тогда на промежуточных остановках вышли

$$40 - 22 = 18 \text{ человек. На каждой остановке выходило 2, всего остановок было } 18/2 = 9.$$

После каждой остановки число людей в автобусе увеличивалось на  $3 - 2 = 1$ , так как 3

садились и 2 выходили. После посещения всех 9 остановок изначальное число людей в

автобусе увеличилось на 9 и стало равно 22. Значит, изначально в автобусе было  $22 - 9 =$

$$13 \text{ человек.}$$

Задача 8.4. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ , причём  $AB = BC = CD < AD$ .

Точка  $H$  — основание перпендикуляра из точки  $B$  на сторону  $AD$ . Известно, что  $\angle ABH =$

$$\angle CBD + 42^\circ$$

. Сколько градусов составляет угол  $DBH$ ?

Ответ: 74.

$A$

$B C$

$H D$

$$\varphi + 42^\circ$$

$\varphi$

Решение. Пусть  $\angle CBD = \varphi$ , тогда  $\angle ABH = \varphi + 42^\circ$

Треугольник  $BCD$  равнобедренный, поэтому  $\angle CBD = \angle BDC = \varphi$ ,  $\angle BCD = 180^\circ - 2\varphi$ . По свойству трапеции  $\angle CDA = 180^\circ - \angle BCD = 2\varphi$ .

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике  $ABH$  легко найти угол  $BAH$ :

$$\angle BAH = 90^\circ - \angle ABH = 90^\circ - (\varphi + 42^\circ) = 48^\circ - \varphi.$$

В равнобокой трапеции углы при основании равны:

$$2\varphi = \angle CDA = \angle BAD = \angle BAH = 48^\circ - \varphi.$$

Получаем, что  $2\varphi = 48^\circ - \varphi$ , откуда  $\varphi = 16^\circ$

И наконец находим искомый угол:  $\angle DBH = \angle CBH - \angle CBD = 90^\circ - \varphi = 74^\circ$

Задача 8.5. Сколькими способами среди чисел 1, 2, 3, ..., 12 можно выбрать три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Способы, отличающиеся порядком чисел, считаются одинаковыми. Например, (1, 2, 3) и (3, 1, 2) — одна и та же тройка чисел.

Ответ: 76.

Решение. Выясним, какие остатки при делении на 3 могут давать три числа с суммой, кратной 3. Несложным перебором приходим к выводу, что все возможные тройки остатков: (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2). Для каждой тройки остатков посчитаем отдельно,

сколько троек чисел ей соответствуют.

Среди чисел 1, 2, 3, ..., 12 ровно 4 числа дают остаток 0 при делении на 3: это 3, 6, 9, 12. Существует ровно 4 способа выбрать три из них: (6, 9, 12), (3, 9, 12), (3, 6, 12), (3, 6, 9). Значит,

есть всего 4 способа выделить три числа с остатками (0, 0, 0) при делении на 3.

Аналогично есть 4 способа выделить три числа с остатками (1, 1, 1) и есть 4 способа выделить три числа с остатками (2, 2, 2) при делении на 3.

A

B M C

P S Q

Рис. 1: к решению задачи 8.7

Посчитаем, сколько существует троек чисел с остатками (0, 1, 2). Есть 4 способа выбрать число с остатком 0, 4 способа — с остатком 1, 4 способа — с остатком 2. Всего способов выбрать тройку чисел с остатками (0, 1, 2) ровно  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ .

Итак, общее количество способов равно  $4 + 4 + 4 + 64 = 76$ .

Задача 8.6. Даны 5 действительных чисел  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ , сумма которых равна 50.

Какое наибольшее значение может принимать величина  $a + b + c$ ?

Ответ: 30.

Решение. Докажем, что  $a + b + c \leq 30$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} 5 \cdot (a + b + c) &= 3 \cdot (a + b + c) + a + a + b + b + c + c \leq \\ &\leq 3 \cdot (a + b + c) + d + d + d + e + e + e = 3 \cdot (a + b + c + d + e) = 150. \end{aligned}$$

Поскольку  $5 \cdot (a + b + c) \leq 150$ , то  $a + b + c \leq 30$ .

Если  $a = b = c = d = e = 10$ , то условие задачи выполнено и  $a + b + c = 30$ , то есть значение 30 достигается.

Задача 8.7. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ . Пусть  $P$  — основание перпендикуляра из точки  $B$  на биссектрису угла  $BMA$ ,  $Q$  — основание перпендикуляра из точки

$C$  на биссектрису угла  $CMA$ . Отрезки  $AM$  и  $PQ$  пересекаются в точке  $S$ . Найдите длину отрезка  $SM$ , если  $BP = 4$  и  $CQ = 3$ .

Ответ: 2,5.

Решение. По условию  $\angle BMP = \angle SMP$  и  $\angle CMQ = \angle SMQ$ . Тогда

$$\angle PMQ = \angle SMP + \angle SMQ = \angle BMP + \angle CMQ = \angle BMA + \angle CMA$$

2

=

$180^\circ$

2

=  $90^\circ$

.

Отсюда следует, что  $\angle PBM = \angle QMC$  и  $\angle PMB = \angle QCM$ . Следовательно, прямоугольные треугольники  $CQM$  и  $MPB$  равны по гипотенузе и острым углам (рис. 1). Из равенства

этих треугольников получаем, что  $PM = QC = 3$  и  $QM = PB = 4$ .

Также заметим, что прямоугольный треугольник  $PMQ$  равен треугольникам  $MPB$  и  $CQM$  по прямому углу и двум катетам. Тогда  $\angle SPM = \angle BMP = \angle SMP$ , поэтому  $SP = SM$ . Аналогично получаем, что  $SM = SQ$ , то есть искомый отрезок  $SM$  равен половине отрезка  $PQ$ .

Воспользовавшись теоремой Пифагора, находим ответ:

$$\begin{aligned} SM &= PQ \\ &= \\ &= \sqrt{MP^2 + MQ^2} \\ &= \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Задача 8.8. На конференцию приехали 7 математиков, 9 физиков и 1 программист. Известно, что у каждого математика по двенадцать знакомых среди участников конференции, а у каждого физика — по четыре. Сколько знакомых может быть у программиста?

Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6, 8.

Решение. Заметим сразу, что число знакомых программиста должно быть чётным, ведь если сложить количества знакомых у всех участников конференции, должно получиться удвоенное общее число знакомств — чётное число.

Обозначим число знакомств между математиками и физиками через  $x$ , между математиками и программистом — через  $y$ , между физиками и программистом — через  $z$ . Ясно,

что  $0 \leq y \leq 7$  и  $0 \leq z \leq 9$ .

Каждый математик знаком с двенадцатью людьми. Из этих двенадцати не более шести — другие математики, а значит каждый математик знает хотя бы шесть не-математиков.



Таким образом, суммарное число знакомств математиков с не-математиками оценивается так:  $x + y \geq 7 \cdot 6 = 42$ .

Каждый физик знаком с четырьмя людьми, и суммарное число знакомств физиков с нефизиками оценивается так:  $x + z \leq 9 \cdot 4 = 36$ .

Имеем  $42 \leq x + y \leq (x + z) + y \leq 36 + y$ , откуда  $y \geq 6$ .

Кроме того,  $36 \geq x + z \geq (42 - y) + z \geq (42 - 7) + z = 35 + z$ , откуда  $z \leq 1$ .

Значит,  $6 \leq y \leq 7$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , откуда получаем, что число знакомых  $y + z$  программиста не меньше 6 и не больше 8. Поскольку это число чётно, получаем два возможных значения: 6 и 8.

Можно привести примеры ситуаций, когда у программиста действительно бывает и 6, и 8 знакомых. На рисунке показано, как можно познакомить 7 математиков (внутренние вершины) с 9 физиками (внешние вершины) так, чтобы у каждого математика, кроме одного, было 5 знакомств, а у оставшегося (с красным ребром) — 6 знакомств. У физиков при этом окажется по 4 знакомства.

После этого всех математиков можно познакомить друг с другом, а всех математиков кроме математика с красным ребром познакомить с программистом. Так получится пример

с 6 знакомствами у программиста.

Чтобы построить пример с 8 знакомствами, можно разорвать знакомство по красному ребру и вместо этого познакомить соответствующих физика и математика с программистом